



TITLE:

# 四元数環のホッホシルト・コホモロジー環について (有限群のコホモロジー論とその周辺)

AUTHOR(S):

速水, 孝夫

---

CITATION:

速水, 孝夫. 四元数環のホッホシルト・コホモロジー環について (有限群のコホモロジー論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2012, 1784: 104-112

ISSUE DATE:

2012-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/172717>

RIGHT:

# On Hochschild Cohomology Rings of Quaternion Algebras (四元数環のホッホシルト・コホモロジー環について)

北海学園大学 工学部 速水 孝夫 (Takao Hayami)  
Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

はじめに

$a, b$  を 0 でない整数とし,

$$\Gamma := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}ij \quad (i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji)$$

を  $\mathbb{Z}$  上の一般四元数環とする.  $a = -1, b = -1$  のとき,  $\mathbb{Z}$  上の (通常の) 四元数環のホッホシルト・コホモロジー環については, その構造が [8] によって得られている.

**Theorem 1** (Sanada [8]). 次が成立する:

$$HH^*(\Gamma) = \mathbb{Z}[\lambda, \mu, \nu] / (2\lambda, 2\mu, 2\nu, \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

ただし,  $\deg \lambda = \deg \mu = \deg \nu = 1$  とする.

そして, この結果の別証明と別の方向での一般化は Hayami (2008) によって与えることができ ([3]), 2007 年のこの研究集会でもその結果を発表させて頂いた. ここで, いくつか疑問に思ったことがある.

**Question 1.**  $a = -1, b = -1$  のとき,  $\Lambda$  を  $\mathbb{Q}$  上の (通常の) 四元数環の極大整環とする. このとき,  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\Lambda)$  の構造はどうなるのか?

**Question 2.**  $a, b$  を 0 でない任意の整数とすると,  $\Gamma$  のホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\Gamma)$  の構造はどうなるのか?

今回はこれらのホッホシルト・コホモロジー環について, その構造を決定することができたので, その結果について, それぞれ以下の §2, §3 で報告したい.

## §1. Preliminaries

多元環のホッホシルト・コホモロジー (Hochschild cohomology) は, Hochschild [6], Cartan and Eilenberg [2], MacLane [7] らによって体系化され, 現在までに様々な多元環のホッホシルト・コホモロジーが計算されている.

$R$  を (単位元をもつ) 可換環,  $\Lambda$  を有限生成で射影的な  $R$  上の多元環とする.  $M$  を両側  $\Lambda$  加群, すなわち  $\Lambda^e = \Lambda \otimes_R \Lambda^{\text{op}}$  加群とすると,  $\Lambda$  の  $M$  を係数加群とする  $n$  次ホッホシルト・コホモロジー群が次のように定義される:

$$H^n(\Lambda, M) := \text{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, M).$$

特に  $M = \Lambda$  としたときのホッホシルト・コホモロジーを  $HH^n(\Lambda) = H^n(\Lambda, \Lambda)$  とかく.

$$HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{n \geq 0} HH^n(\Lambda)$$

とおくと,  $HH^*(\Lambda)$  は Yoneda 積によって, 次数つき環としての構造を導入することができ, これを  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジー環という.  $1 \in Z\Lambda \simeq HH^0(\Lambda)$  が  $HH^*(\Lambda)$  の単位元である. ここで,  $Z\Lambda$  は  $\Lambda$  の中心を表す.  $HH^*(\Lambda)$  は graded-commutative, すなわち,  $\alpha \in HH^p(\Lambda), \beta \in HH^q(\Lambda)$  に対して,  $\alpha\beta = (-1)^{pq}\beta\alpha$  が成立する.

ホッホシルト・コホモロジーは多元環の重要な不変量であるが, たとえ小さな多元環の場合でもその計算は非常に複雑である.

## §2. Hochschild cohomology ring of a maximal order of the ordinary quaternion algebra

$\Lambda$  を  $\mathbb{Q}$  上の (通常) の四元数環とする. つまり,

$$\Lambda := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}ij \quad (i^2 = -1, j^2 = -1, ij = -ji)$$

とする.

$$\alpha = (1 + i + j + ij)/2$$

とおくと,

$$\Lambda := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}\alpha$$

は  $\Lambda$  の極大整環となる (なお, この  $\Lambda$  は四元数環ではない).

このとき, 次の関係式が成立する.

$$i\alpha = \alpha - 1 - j = i - 1 - \alpha i, \quad j\alpha + \alpha j = j - 1, \quad \alpha^2 = \alpha - 1.$$

したがって,  $1, i, \alpha, i\alpha$  は  $\mathbb{Z}$  上線型独立であり,  $\Lambda$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底として,  $\{1, i, \alpha, i\alpha\}$  を取ることができる.

ここで, 古い結果ではあるが, 次のことが知られている.

**Lemma 2** (F.R. Bobovich, 1969 [1]). 代数体上の中心的単純多元環の極大整環のホッホシルト・コホモロジーの加群の周期は 2 である.

したがって,  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジーの加群の周期が 2 であることが分かるが, 環構造までは明らかではない. 以下では, この  $\Lambda$  の両側  $\Lambda$  加群としての射影分解を構成し, これを用いて  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジー群を計算し, さらに生成元の間の積を Yoneda 積を用いて計算することにより,  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\Lambda)$  の構造を決定する ([4]).

以下では、整数  $q \geq 0$  に対して、 $Z_q = (\Lambda \otimes \Lambda)^{q+1}$  とおく。ここで、右辺は  $\Lambda \otimes \Lambda$  の  $q+1$  個のコピーの直和を表す。また、第  $k$  成分が  $1 \otimes 1$  で、それ以外の成分が 0 であるような  $Z_q$  の元を  $c_q^k$  とおく：

$$c_q^k = \begin{cases} (0, \dots, 0, \underbrace{1 \otimes 1}_k, 0, \dots, 0) & (\text{if } 1 \leq k \leq q+1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ここで、 $1 < k$  または  $k > q+1$  のときは、 $c_q^k = 0$  とする。このとき、 $Z_q = \bigoplus_{k=1}^{q+1} \Lambda c_q^k \Lambda$  である。

**Theorem 3.** 以下で与えられる  $\Lambda$  の両側  $\Lambda$  加群としての射影分解

$$(Z, \partial) : \cdots \rightarrow Z_3 \xrightarrow{\partial_3} Z_2 \xrightarrow{\partial_2} Z_1 \xrightarrow{\partial_1} Z_0 \xrightarrow{\partial_0} \Lambda \rightarrow 0$$

が存在する。ただし、 $\partial_0 : Z_0 \rightarrow \Lambda; \lambda_1 c_0^1 \lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_2 \mapsto \lambda_1 \lambda_2$  (*multiplication map*) とし、 $\partial_q : Z_q \rightarrow Z_{q-1}$  ( $q > 0$ ) は

$$\partial_q(c_q^s) = \begin{cases} ic_{q-1}^s + c_{q-1}^s i + \alpha c_{q-1}^{s-1} + c_{q-1}^{s-1} \alpha - c_{q-1}^{s-1} & \text{for } q \text{ even,} \\ ic_{q-1}^s - c_{q-1}^s i + \alpha c_{q-1}^{s-1} - c_{q-1}^{s-1} \alpha & \text{for } q \text{ odd} \end{cases}$$

で与えられる両側  $\Lambda$  加群としての準同型である。

**証明の概略:** 直接計算により、 $\partial_q \cdot \partial_{q+1} = 0$  ( $q \geq 0$ ) であることが分かる。また、右  $\Lambda$  加群としての準同型  $T_q : Z_q \rightarrow Z_{q+1}$  ( $q \geq -1$ ) を次のように定義する：

$q = -1$  のとき、 $T_{-1} : Z_{-1} = \Lambda \rightarrow Z_0; \lambda \mapsto c_0^1 \lambda$  ( $\forall \lambda \in \Lambda$ )。

$q \geq 0$  のとき、

$$T_q(i^m c_q^s) = \begin{cases} mc_{q+1}^1 & (s = 1), \\ 0 & (s \geq 2), \end{cases}$$

$$T_q(i^m \alpha c_q^s) = \begin{cases} mc_{q+1}^1 - mc_{q+1}^1 \alpha + i^m c_{q+1}^2 & (s = 1 \text{ and } q \text{ odd}), \\ mc_{q+1}^1 \alpha + i^m c_{q+1}^2 & (s = 1 \text{ and } q \text{ even}), \\ i^m c_{q+1}^{s+1} & (s \geq 2). \end{cases}$$

ただし、 $m = 0, 1$  とする。このとき、 $T_q : Z_q \rightarrow Z_{q+1}$  ( $q \geq -1$ ) は contracting homotopy であること、すなわち、

$$\partial_{q+1} T_q + T_{q-1} \partial_q = \text{id}_{Z_q} \quad (q \geq 0)$$

が成立することが直接計算により示される。したがって、 $(Z, \partial)$  は  $\Lambda$  の両側  $\Lambda$  加群としての射影分解である。□

以下では、加群  $M$  と自然数  $q$  に対して、 $M$  の  $q$  個のコピーの直和を  $M^q$  で表す。また、第  $k$  成分が 1 で、それ以外の成分が 0 であるような  $\Lambda^{q+1}$  の元を  $\iota_q^k$  とおく：

$$\iota_q^k = \begin{cases} (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0) & (\text{if } 1 \leq k \leq q+1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ここで、 $1 < k$  または  $k > q+1$  のときは、 $\iota_q^k = 0$  とする。射影分解  $(Z, \partial)$  に、関手  $\text{Hom}_{\Lambda^e}(-, \Lambda)$  を施すことにより、次のコホモロジーを計算するための complex が得られる。

$$(\text{Hom}_{\Lambda^e}(Z, \Lambda), \partial^\#) : 0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{\partial_1^\#} \Lambda^2 \xrightarrow{\partial_2^\#} \Lambda^3 \xrightarrow{\partial_3^\#} \Lambda^4 \xrightarrow{\partial_4^\#} \Lambda^5 \rightarrow \dots,$$

$$\partial_{q+1}^\#(\lambda \iota_q^s) = \begin{cases} (i\lambda - \lambda i)\iota_{q+1}^s + (\alpha\lambda - \lambda\alpha)\iota_{q+1}^{s+1} & \text{for } q \text{ odd}, \\ (i\lambda + \lambda i)\iota_{q+1}^s + (\alpha\lambda + \lambda\alpha - \lambda)\iota_{q+1}^{s+1} & \text{for } q \text{ even}. \end{cases}$$

この complex を用いて、少し複雑な計算ではあるが、コホモロジーを計算すると、

$$HH^n(\Lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0), \\ 0 & (n \text{ odd}), \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n(\neq 0) \text{ even}) \end{cases}$$

が得られる。なお、 $n(>0)$  が偶数のとき、 $HH^n(\Lambda) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の加群の生成元として、 $\iota_n^1$  を取ることができる。

次に、コホモロジーの加群の生成元の間 Yoneda 積を計算する。

$HH^2(\Lambda)$  の加群の生成元を  $\sigma = \iota_2^1$  とおくと、 $\sigma$  は両側  $\Lambda$  加群としての準同型

$$\hat{\sigma} : Z_2 \rightarrow \Lambda; c_2^1 \mapsto 1, c_2^2 \mapsto 0, c_2^3 \mapsto 0$$

によって代表されている。 $\hat{\sigma}$  の lifting を計算すると、次の通りである。

**Lemma 4.**  $\hat{\sigma}$  の lifting  $f_n : Z_{n+2} \rightarrow Z_n$  は  $f_n(c_{n+2}^k) = c_n^k$  で与えられる。ただし、 $n \geq 0$  とする。

この  $\hat{\sigma}$  の lifting を用いて、Yoneda 積を計算すると、 $\sigma^m = \iota_{2m}^1 \in HH^{2m}(\Lambda)$  ( $m \geq 1$ ) が示される。したがって、次の定理を得る。

**Theorem 5.**  $\Lambda$  のホッホシルト・コホモロジー環は次の通り：

$$HH^*(\Lambda) = \mathbb{Z}[\sigma]/(2\sigma).$$

ただし、 $\deg \sigma = 2$  である。

### §3. Hochschild cohomology ring of a generalized quaternion algebra

$a, b$  を 0 でない整数とするとき,  $\mathbb{Z}$  上の一般四元数環

$$\Gamma := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}ij \quad (i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji)$$

を考える. 以下では, この一般四元数環  $\Gamma$  の両側  $\Gamma$  加群としての射影分解を与え, これを用いて  $\Gamma$  のホッホシルト・コホモロジー群を計算し, 加群の生成元間の Yoneda 積を計算することにより, ホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\Gamma)$  の構造を決定する ([5]).

まず, 整数  $q \geq 0$  に対して,  $Y_q = (\Gamma \otimes \Gamma)^{q+1}$  ( $\Gamma \otimes \Gamma$  の  $q+1$  個のコピーの直和) とおく. また, §2 と同様な記号を用いるが, 第  $k$  成分が  $1 \otimes 1$  で, それ以外の成分が 0 であるような  $Y_q$  の元を  $c_q^k$  とおく. ただし,  $1 < k$  または  $k > q+1$  のときは,  $c_q^k = 0$  とする. このとき,  $Y_q = \bigoplus_{k=1}^{q+1} \Gamma c_q^k \Gamma$  である.

**Theorem 6.** 以下で与えられる  $\Gamma$  の両側  $\Gamma$  加群としての射影分解

$$(Y, \delta) : \cdots \rightarrow Y_3 \xrightarrow{\delta_3} Y_2 \xrightarrow{\delta_2} Y_1 \xrightarrow{\delta_1} Y_0 \xrightarrow{\delta_0} \Gamma \rightarrow 0$$

が存在する. ただし,  $\delta_0 : Y_0 \rightarrow \Gamma; \gamma_1 c_0^1 \gamma_2 = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \mapsto \gamma_1 \gamma_2$  (multiplication map) とし, 各  $\delta_q : Y_q \rightarrow Y_{q-1}$  ( $q > 0$ ) は,

$$\delta_q(c_q^s) = \begin{cases} ic_{q-1}^s - c_{q-1}^s i + jc_{q-1}^{s-1} - c_{q-1}^{s-1} j & \text{for } q \text{ odd,} \\ ic_{q-1}^s + c_{q-1}^s i + jc_{q-1}^{s-1} + c_{q-1}^{s-1} j & \text{for } q \text{ even} \end{cases}$$

で与えられる両側  $\Gamma$  加群としての準同型である.

なお,  $a = -1, b = -1$  のとき,  $\Gamma$  の両側  $\Gamma$  加群としての射影分解は, [3] でも与えられているが, 今回の方が differential を少し簡単な形で求めることができた.

**証明の概略:** 直接計算により,  $\delta_q \cdot \delta_{q+1} = 0$  ( $q \geq 0$ ) が示される. また, 右  $\Gamma$  加群としての準同型  $T_q : Y_q \rightarrow Y_{q+1}$  ( $q \geq -1$ ) を次のように定義する:

$q = -1$  のとき,  $T_{-1} : Y_{-1} = \Gamma \rightarrow Y_0; \gamma \mapsto c_0^1 \gamma$  ( $\forall \gamma \in \Gamma$ ).  
 $q \geq 0$  のとき,

$$T_q(i^m j^n c_q^s) = \begin{cases} mc_{q+1}^1 & (s = 1, m = 0, 1, n = 0), \\ (-1)^q mc_{q+1}^1 j + i^m c_{q+1}^2 & (s = 1, m = 0, 1, n = 1), \\ 0 & (s \geq 2, m = 0, 1, n = 0), \\ i^m c_{q+1}^{s+1} & (s \geq 2, m = 0, 1, n = 1). \end{cases}$$

ただし,  $m = 0, 1$  とする. このとき,  $T_q : Y_q \rightarrow Y_{q+1}$  ( $q \geq -1$ ) は contracting homotopy であること, すなわち,

$$\delta_{q+1} T_q + T_{q-1} \delta_q = \text{id}_{Y_q} \quad (q \geq 0)$$

が示される。□

§2と同様に、加群  $M$  と自然数  $q$  に対して、 $M$  の  $q$  個のコピーの直和を  $M^q$  で表す。また、第  $k$  成分が 1 で、それ以外の成分が 0 であるような  $\Gamma^{q+1}$  の元を  $\iota_q^k$  とおく。ただし、 $1 < k$  または  $k > q+1$  のときは、 $\iota_q^k = 0$  とする。

射影分解  $(Y, \delta)$  に、関手  $\text{Hom}_{\Gamma^e}(-, \Gamma)$  を施すことにより、 $\Gamma$  のホッホシルト・コホモロジーを計算するための complex

$$(\text{Hom}_{\Gamma^e}(Y, \Gamma), \delta^\#) : 0 \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\delta_1^\#} \Gamma^2 \xrightarrow{\delta_2^\#} \Gamma^3 \xrightarrow{\delta_3^\#} \Gamma^4 \xrightarrow{\delta_4^\#} \Gamma^5 \rightarrow \dots,$$

$$\delta_{q+1}^\#(\gamma \iota_q^s) = \begin{cases} (i\gamma - \gamma i)\iota_{q+1}^s + (j\gamma - \gamma j)\iota_{q+1}^{s+1} & \text{for } q \text{ odd,} \\ (i\gamma + \gamma i)\iota_{q+1}^s + (j\gamma + \gamma j)\iota_{q+1}^{s+1} & \text{for } q \text{ even} \end{cases}$$

が得られる。この complex を用いてコホモロジーを計算すると、次を得る。

**Theorem 7.**  $\Gamma$  のホッホシルト・コホモロジーの加群構造は次の通り：

$$HH^n(\Gamma) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0), \\ (\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z})^n \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} & (n \text{ odd}), \\ \mathbb{Z}/2a\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z})^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2b\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & (n(\neq 0) \text{ even}). \end{cases}$$

ただし、 $d = \gcd(a, b)$  ( $a, b$  の最大公約数) とする。

**Remark.** 特に、 $a = \pm 1, b = \pm 1$  のときは、

$$HH^n(\Gamma) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2n+1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

である。

次に、 $HH^n(\Gamma)$  の加群の生成元の間 Yoneda 積を計算することにより、 $HH^*(\Gamma)$  の環構造を決定する。以下では、

$$d = \gcd(a, b), \quad a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}$$

とおく。

まず、 $HH^1(\Gamma)$  の加群構造を生成元を用いて表示すると、次の通りである：

$$HH^1(\Gamma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(ij, 0) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0, ij) \oplus \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}(a'j, -b'i).$$

$HH^1(\Gamma)$  の加群の生成元を次のように置く。

$$\lambda_1 = (ij, 0), \quad \mu_1 = (0, ij), \quad \nu_1 = (a'j, -b'i).$$

このとき,  $2\lambda_1 = 2\mu_1 = 2d\nu_1 = 0$  であり,  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  はそれぞれ以下で与えられる両側  $\Gamma$  加群としての準同型

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_1 : Y_1 &\rightarrow \Gamma; c_1^1 \mapsto ij, c_1^2 \mapsto 0, \\ \widehat{\mu}_1 : Y_1 &\rightarrow \Gamma; c_1^1 \mapsto 0, c_1^2 \mapsto ij, \\ \widehat{\nu}_1 : Y_1 &\rightarrow \Gamma; c_1^1 \mapsto a'j, c_1^2 \mapsto -b'i\end{aligned}$$

によって代表される.

**Lemma 8.** (i)  $\widehat{\lambda}_1$  の *lifting*  $u_n : Y_{n+1} \rightarrow Y_n$  の *initial part* は次の通り :

$$\begin{aligned}u_0(c_1^1) &= ij c_0^1, \quad u_0(c_1^2) = 0; \\ u_1(c_2^1) &= -ij c_1^1, \quad u_1(c_2^2) = -ij c_1^2, \quad u_1(c_2^3) = 0.\end{aligned}$$

(ii)  $\widehat{\mu}_1$  の *lifting*  $v_n : Y_{n+1} \rightarrow Y_n$  の *initial part* は次の通り :

$$\begin{aligned}v_0(c_1^1) &= 0, \quad v_0(c_1^2) = ij c_0^1; \\ v_1(c_2^1) &= 0, \quad v_1(c_2^2) = -ij c_1^1, \quad v_1(c_2^3) = -ij c_1^2.\end{aligned}$$

(iii)  $\widehat{\nu}_1$  の *lifting*  $w_n : Y_{n+1} \rightarrow Y_n$  の *initial part* は次の通り :

$$\begin{aligned}w_0(c_1^1) &= a'j c_0^1, \quad w_0(c_1^2) = -b'ic_0^1; \\ w_1(c_2^1) &= -a'j c_1^1, \quad w_1(c_2^2) = b'ic_1^1 - a'j c_1^2, \quad w_1(c_2^3) = b'ic_1^2.\end{aligned}$$

さて,  $HH^2(\Gamma)$  の加群構造を生成元を用いて表示すると,

$$\begin{aligned}HH^2(\Gamma) &= \mathbb{Z}/2a\mathbb{Z}(1, 0, 0) \oplus \mathbb{Z}/2b\mathbb{Z}(0, 0, 1) \oplus \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}(0, 1, 0) \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(i, j, 0) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0, i, j)\end{aligned}$$

である.  $HH^1(\Gamma)$  の加群の生成元のための Yoneda 積を計算すると, 次が得られる.

**Proposition 9.**  $HH^2(\Gamma)$  において次が成立する :

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= ab(1, 0, 0), \quad \mu_1^2 = ab(0, 0, 1), \quad \lambda_1\mu_1 = ab(0, 1, 0), \\ \lambda_1\nu_1 &= a'b(i, j, 0), \quad \mu_1\nu_1 = a'b(0, i, j), \quad a'\lambda_1^2 + b'\mu_1^2 + d\nu_1^2 = 0.\end{aligned}$$

特に,  $a = \pm 1, b = \pm 1$  のとき,  $HH^2(\Gamma)$  は  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  の積で生成される.

以下,  $HH^2(\Gamma)$  の生成元を次のようにとる.

$$\begin{aligned}\tau_2 &= (1, 0, 0), \quad \xi_2 = (0, 0, 1), \\ \lambda_2 &= (i, j, 0), \quad \mu_2 = (0, i, j), \quad \nu_2 = (0, 1, 0).\end{aligned}$$



このとき,  $\tau_2, \xi_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$  は, それぞれ次のような両側  $\Gamma$  加群としての準同型

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}_2 : Y_2 &\rightarrow \Gamma; c_2^1 \mapsto 1, c_2^2 \mapsto 0, c_2^3 \mapsto 0; \\ \widehat{\xi}_2 : Y_2 &\rightarrow \Gamma; c_2^1 \mapsto 0, c_2^2 \mapsto 0, c_2^3 \mapsto 1; \\ \widehat{\lambda}_2 : Y_2 &\rightarrow \Gamma; c_2^1 \mapsto i, c_2^2 \mapsto j, c_2^3 \mapsto 0; \\ \widehat{\mu}_2 : Y_2 &\rightarrow \Gamma; c_2^1 \mapsto 0, c_2^2 \mapsto i, c_2^3 \mapsto j; \\ \widehat{\nu}_2 : Y_2 &\rightarrow \Gamma; c_2^1 \mapsto 0, c_2^2 \mapsto 1, c_2^3 \mapsto 0\end{aligned}$$

によって代表され, 次の関係式

$$\begin{aligned}2a\tau_2 &= 2b\xi_2 = 2\lambda_2 = 2\mu_2 = 2d\nu_2 = 0, \\ \lambda_1^2 &= ab\tau_2, \mu_1^2 = ab\xi_2, \lambda_1\mu_1 = ab\nu_2, \lambda_1\nu_1 = a'b\lambda_2, \mu_1\nu_1 = a'b\mu_2\end{aligned}$$

を満たす.

**Lemma 10.** (i)  $\widehat{\tau}_2$  の *lifting*  $f_n : Y_{n+2} \rightarrow Y_n$  ( $n \geq 0$ ) は  $f_n(c_{n+2}^k) = c_n^k$  で与えられる.

(ii)  $\widehat{\xi}_2$  の *lifting*  $g_n : Y_{n+2} \rightarrow Y_n$  ( $n \geq 0$ ) は  $g_n(c_{n+2}^k) = c_n^{k-2}$  で与えられる.

(iii)  $\widehat{\nu}_2$  の *lifting*  $h_n : Y_{n+2} \rightarrow Y_n$  は  $h_n(c_{n+2}^k) = c_n^{k-1}$  で与えられる.

(iv)  $\widehat{\lambda}_2$  の *lifting*  $s_n : Y_{n+2} \rightarrow Y_n$  の *initial part* は,  $s_n(c_{n+2}^k) = jc_n^{k-1} + ic_n^k$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) で与えられる.

(v)  $\widehat{\mu}_2$  の *lifting*  $t_n : Y_{n+2} \rightarrow Y_n$  の *initial part* は,  $t_n(c_{n+2}^k) = jc_n^{k-2} + ic_n^{k-1}$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) で与えられる.

これらの *lifting* を用いて, Yoneda 積を計算すると, 次が得られる.

**Proposition 11.**  $HH^3(\Gamma)$  は  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \tau_2, \xi_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$  の積によって生成される. また,  $HH^3(\Gamma)$  において, 次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned}\mu_1\tau_2 &= \lambda_1\nu_2, \lambda_1\xi_2 = \mu_1\nu_2, \lambda_1\mu_2 = \mu_1\lambda_2 = d\nu_1\nu_2, \lambda_1\lambda_2 = d\nu_1\tau_2, \\ \mu_1\mu_2 &= d\nu_1\xi_2, \nu_1\lambda_2 = a'\lambda_1\tau_2 + b'\lambda_1\xi_2, \nu_1\mu_2 = a'\mu_1\tau_2 + b'\mu_1\xi_2.\end{aligned}$$

**Proposition 12.**  $HH^4(\Gamma)$  は  $\tau_2, \xi_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$  の積によって生成される. また,  $HH^4(\Gamma)$  において, 次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned}\tau_2\mu_2 &= \lambda_2\nu_2, \lambda_2\xi_2 = \mu_2\nu_2, \tau_2\xi_2 = \nu_2^2, \\ \lambda_2^2 &= a\tau_2^2 + b\tau_2\xi_2, \lambda_2\mu_2 = a\tau_2\nu_2 + b\nu_2\xi_2, \mu_2^2 = a\tau_2\xi_2 + b\xi_2^2.\end{aligned}$$

以下, 同様に Yoneda 積を計算すると,  $HH^n(\Gamma)$  ( $n \geq 5$ ) も同様に,  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \tau_2, \xi_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$  の積によって生成されていることが示される. また, 環構造を記述するために必要な関係式が, これまで出てきたもので十分であることも示すことができる.

以上をまとめると, 次の定理が得られる.  $a = -1, b = -1$  のときの  $HH^*(\Gamma)$  の環構造よりも, 複雑であることが分かる.

**Theorem 13.**  $\Gamma$  のホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\Gamma)$  は可換環であり,  $\mathbb{Z}$  上の多元環として, 次の元

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1 \in HH^1(\Gamma), \tau_2, \xi_2, \nu_2, \lambda_2, \mu_2 \in HH^2(\Gamma)$$

で生成され, 以下の関係式を満たす.

(i) *degree-1 relations*

$$2\lambda_1 = 2\mu_1 = 2d\nu_1 = 0.$$

(ii) *degree-2 relations*

$$2a\tau_2 = 2b\xi_2 = 2\lambda_2 = 2\mu_2 = 2d\nu_2 = 0, \quad a'\lambda_1^2 + b'\mu_1^2 + d\nu_1^2 = 0, \\ \lambda_1^2 = ab\tau_2, \quad \mu_1^2 = ab\xi_2, \quad \lambda_1\mu_1 = ab\nu_2, \quad \lambda_1\nu_1 = a'b\lambda_2, \quad \mu_1\nu_1 = a'b\mu_2.$$

(iii) *degree-3 relations*

$$\mu_1\tau_2 = \lambda_1\nu_2, \quad \lambda_1\xi_2 = \mu_1\nu_2, \quad \lambda_1\mu_2 = \mu_1\lambda_2 = d\nu_1\nu_2, \quad \lambda_1\lambda_2 = d\nu_1\tau_2, \\ \mu_1\mu_2 = d\nu_1\xi_2, \quad \nu_1\lambda_2 = a'\lambda_1\tau_2 + b'\lambda_1\xi_2, \quad \nu_1\mu_2 = a'\mu_1\tau_2 + b'\mu_1\xi_2.$$

(iv) *degree-4 relations*

$$\tau_2\mu_2 = \lambda_2\nu_2, \quad \lambda_2\xi_2 = \mu_2\nu_2, \quad \tau_2\xi_2 = \nu_2^2, \\ \lambda_2^2 = a\tau_2^2 + b\tau_2\xi_2, \quad \lambda_2\mu_2 = a\tau_2\nu_2 + b\nu_2\xi_2, \quad \mu_2^2 = a\tau_2\xi_2 + b\xi_2^2.$$

## 謝辞

今回の発表の機会を与えて頂いた佐々木洋城先生には大変にお世話になりました. 改めまして, 心よりお礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] F. R. Bobovich, *Cohomologies of maximal orders of simple central algebras*, Math. Notes **6** (1969), 589–592; Engl. transl., Mat. Zametki **6** (1969), 225–231.
- [2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1956.
- [3] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of an order of a simple component of the rational group ring of the generalized quaternion group*, Comm. Algebra **36** (2008) 2785–2803.
- [4] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of a maximal order of the quaternion algebra*, to appear.
- [5] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the generalized quaternion algebras*, preprint.
- [6] G. Hochschild, *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra*, Ann. of Math. **46** (1945), 58–67.
- [7] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [8] K. Sanada, *On the Hochschild cohomology of crossed products*, Comm. Algebra **21** (1993), 2727–2748.